Teoria do caos: a ordem na não-lineariedade

Franciele Fey[1] | **Jarbas André da Rosa**[2]

Resumo

O objetivo principal da Teoria do Caos é explicar o funcionamento de sistemas complexos e dinâmicos. Os matemáticos desejam prever o que pensamos ser o acaso e demonstrar que, na realidade, esse é um fenômeno que pode ser representado por equações. Os cálculos envolvendo a Teoria do Caos são utilizados para descrever e entender fenômenos meteorológicos, crescimento de populações, variações no mercado financeiro, movimentos de placas tectônicas, entre outros. O presente artigo procura também registrar a relação e a aplicação da Matemática, por meio de alguns de seus conceitos, na Teoria do Caos. A Matemática é fundamental no desenvolvimento de cálculos que comprovam tal Teoria. Nesse sentido, apresentar-se-ão algumas sugestões de atividades didáticas e relato de aplicações que envolvem a Teoria do Caos como elemento motivador da aprendizagem matemática e também como fonte de promoção do conhecimento dessa ciência, sendo este último o principal objetivo. Portanto, a relação entre essas duas áreas da ciência procura auxiliar na construção e na organização dos aspectos cognitivos, com o objetivo de aprimorar os processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Assim sendo, busca investir também na aproximação dos principais sujeitos envolvidos: o professor e o aluno.

Palavras-chave: Teoria do Caos. Ensino e aprendizagem de Matemática. Sistemas dinâmicos complexos. Não-lineariedade.

Abstract

Explaining how dynamical and complex systems work is the main objective of Chaos Theory. Mathematicians try to predict what we think chance is and prove that it is actually a phenomenon that can be represented by equations. Calculations involving Chaos Theory are used to describe and understand meteorological phenomena, population growth, variations in financial market, and plate tectonics, among other things. This article seeks to register the relation between Chaos Theory and Applied Mathematics, using some of its concepts. Mathematics is essential to develop equations that prove the

[1] Graduada em Matemática pelas Faculdades Integradas de Taquara - Faccat - Taquara, RS.
francitc@gmail.com
[2] Faculdades Integradas de Taquara - Faccat - Taquara, RS. Orientador.
jarbas@faccat.br - http://lattes.cnpq.br/3488319075846228

aforementioned theory. For this reason, this article will present suggestions of didactic activities and a report of applications involving Chaos Theory as a motivational element in the process of Mathematics learning and as a way of promoting this science, which is our main objective. Thus, the relation between these two branches of science helps in constructing and organizing cognitive aspects with a view to develop teaching and learning processes in Mathematics. Such relation also turns to approaching two of the main subjects involved in these processes: teacher and student.

Keywords: *Chaos Theory. Mathematics teaching and learning. Complex dynamical systems. Nonlinearity.*

1 Introdução

É notória a importância que se dá, cada vez com maior frequência, para a obtenção de conhecimentos que nos deem o domínio das situações. Esse conhecimento tem se tornado cada vez mais possível, principalmente nas últimas quatro décadas, quando, a partir dos estudos de um meteorologista norte-americano chamado Edward Lorenz, conseguiu-se fazer algo até então inusitado. Segundo Gleick (1990), utilizando equações que envolviam apenas três variáveis - temperatura, pressão atmosférica e velocidade dos ventos –, Lorenz tornou possível fazer previsões do tempo.

Desde então, a Teoria do Caos, que outrora era aplicada somente para que houvesse entendimento dos mecanismos que dão origem às tempestades, torrentes e outros fenômenos meteorológicos (PRIGOGINE, 2002), tem vindo dar explicações nos campos da Matemática, da Física, da Biologia, da Medicina, das Ciências Sociais, da Economia, da Astronomia, entre outros. Consequentemente, as relações sociais, econômicas, políticas e financeiras tornaram-se mais compreensíveis, valorizando-se com ênfase a tomada de conhecimento dessas informações em virtude da necessidade e do desejo que há em poder compreender e até mesmo prever fatos que podem vir a acontecer.

Fator decisivo para essa mudança foi a percepção e a aceitação de que o Caos já não é apenas uma teoria científica de alto grau de complexidade e difícil compreensão. Tem se tornado a chave capaz de explicar fenômenos até então considerados inexplicáveis e, por isso, sem interesse científico. O motivo para tanto torna-se claro por meio das palavras de Gleick (1990, p. 3): “Onde está o Caos, a ciência clássica pára”.

O Caos torna questionáveis as nossas maiores certezas e suscita novas indagações acerca de nossa própria realidade.

A sociedade moderna é obcecada pela previsão, pelo controle e pela manipulação de tudo o que a cerca. Porém, os sistemas caóticos e não lineares presentes na natureza, na sociedade e em nossas próprias vidas estão muito além de permitir que se faça qualquer previsão, manipulação ou que se obtenha controle.

Os sistemas caóticos encontram-se muito distantes de nossas tentativas de domínio, pois uma pequenina mudança no início de um evento pode trazer consequências enormes e absolutamente desconhecidas no futuro, o que é metaforicamente explicado pelo chamado “Efeito Borboleta”, e, por isso, tais eventos seriam praticamente imprevisíveis – caóticos, portanto.

A Teoria do Caos é uma das leis mais importantes do Universo, presente na essência de quase tudo o que nos cerca. Parece assustador, mas é só observar atentamente os fenômenos mais casuais da vida para notar que essa ideia faz muito sentido.

Observe o exemplo de Silva e Silva (2010, p. 1):

> Imagine que, no passado, você tenha perdido o vestibular na faculdade de seus sonhos porque um prego furou o pneu do ônibus. Desconsolado, você entra em outra universidade. Então, as pessoas com quem você vai conviver serão outras, seus amigos vão mudar, os amores serão diferentes, seus filhos e netos podem ser outros...

No final, sua vida se alterou por completo, e tudo por causa de um prego no início dessa sequência de eventos.

Com o tempo, cientistas concluíram que essa imprevisibilidade aparecia em quase tudo, do ritmo dos batimentos cardíacos às cotações da Bolsa de Valores. Na década de 1970, o matemático polonês Benoit Mandelbrot (1983) deu um novo impulso à teoria ao notar que as equações de Lorenz batiam com as que ele próprio havia feito quando desenvolveu os Fractais, figuras geradas a partir de fórmulas que retratam matematicamente a geometria da natureza, como o relevo do solo ou as ramificações de nossas veias e artérias.

A junção do experimento de Lorenz com a matemática de Mandelbrot indica que o Caos parece estar na essência de tudo, moldando o Universo.

Pesquisas recentes mostraram algo ainda mais surpreendente: equações idênticas aparecem em fenômenos caóticos que não têm relações uns com os outros. Isso significa que pode haver uma estranha ordem por trás de toda a imprevisibilidade. Só a continuação das experimentações pode resolver o mistério.

É de extrema importância que se tenha bem claro que o Caos não é desordem, mas sim imprevisibilidade, que busca no aparente acaso uma ordem que é determinada por leis precisas. O sistema caótico não é aleatório nem desordenado, pois existe uma ordem e um padrão no sistema como um todo. É o que chamamos de Caos determinístico, porque há uma equação que define o seu comportamento. Por meio da Teoria do Caos, podemos ver ordem e padrão onde só se observavam aleatoriedades e irregularidades. Há sempre uma ordem escondida no Caos.

Uma parte muito importante da Teoria do Caos encontra-se na geometria fractal. O termo fractal, que, segundo Barbosa (2005, p. 11), foi criado por Benoit Mandelbrot, designa um objeto geométrico que nunca perde sua estrutura. Significa, acima de tudo, semelhança.

O estudo dos Fractais está ligado à Teoria do Caos, que busca padrões organizados de comportamento dentro de um sistema aparentemente aleatório.

Conforme Siqueira (2010), na mitologia grega, Caos era o estado não organizado, ou o nada, de onde todas as coisas surgiam. Mas não era apenas o mero vácuo, mas o estado de escuridão e nebulosidade infinita.

Hoje em dia - com o desenvolvimento da matemática e da ciência -, a Teoria do Caos surgiu para compreender as flutuações erráticas e irregulares da natureza, resíduos da formação primordial vindas do grande ovo de Caos. Sistemas de comportamento caótico são encontrados em muitos campos da ciência e da engenharia e são estudados, pois, muitas vezes, são encontrados padrões que mostram uma estrutura ordenada no sistema.

A ciência dos Fractais, tida como a linguagem do Caos, apresenta estruturas geométricas de grande complexidade e de beleza infinita, ligadas às formas da natureza e ao desenvolvimento da vida e à própria compreensão do universo. São imagens de objetos abstratos que possuem caráter de onipresença por terem as características do todo infinitamente multiplicadas dentro de cada parte.

Apesar das inúmeras aplicações e utilidades, os Fractais ainda têm um longo caminho pela frente. Faltam muitas ferramentas, e vários problemas continuam sem solução. Uma teoria completa e unificada é necessária, e a pesquisa prossegue nesse sentido.

Os Fractais, dentro de sua proporção e escala, repetem-se em si mesmos, característica denominada como autossimilaridade. Eles revolucionaram a geração e a reprodução de imagens. As estruturas fragmentadas, infinitamente belas e complexas dessa geometria fornecem certa ordem no Caos. Por isso, às vezes é considerada como a sua linguagem, que busca padrões dentro de um sistema aparentemente aleatório.

Conforme Gleick (1990, p. 95): "A mente não pode visualizar toda a capacidade infinita que a complexidade tem de auto-embutir-se. Mas para alguém que pense como um geômetra sobre a forma, esse tipo de repetição da estrutura em escalas cada vez menores pode abrir todo um mundo".

Se formos falar em valores estéticos, a nova matemática da geometria fractal pôs a ciência exata em harmonia com o sentimento característico moderno da natureza não domesticada, não civilizada, não domada.

Mesmo causando um impacto inicial quando pronunciada, ou por desconhecimento, ou por parecer não se associar-se à Matemática, a Teoria do Caos chama atenção por possuir uma importância histórica intensa. Além disso, ela é conhecida em quase todo o planeta em virtude da relação íntima com a língua materna, e as matemáticas[3].

Devido às considerações anteriores, percebe-se a necessidade de descobrir, desmistificar e difundir essa ciência, tão importante para a compreensão de muitos fenômenos.

Para Prigogine (2002, p. 8, grifo do autor):

> [...] a formulação tradicional das leis da natureza contrapunha as leis fundamentais *atemporais* às descrições fenomenológicas, que incluem a seta do tempo. A reconsideração do Caos leva também a uma nova ocorrência, a uma ciência que não fala apenas de leis, mas também de eventos, a qual não está condenada a negar o surgimento do novo, que comportaria uma recusa da sua própria atividade criadora.

Justifica-se a pesquisa no tocante à reunião de elementos e compilação de dados e fatos para promover o conhecimento e entendimento da Teoria do Caos, assim como introduzir algumas técnicas matemáticas utilizadas como instrumento na sua aplicação.

A evolução dos conhecimentos matemáticos está associada à própria evolução

---

[3] Segundo D`Ambrósio o termo "as matemáticas" refere-se ao modo de usar os ramos da Matemática de acordo com a realidade local. Tem relação com o aparecimento de novas idéias na Matemática, fora do currículo - mas que tem relação íntima com a disciplina - causando discussão sobre sua teorização, seja na sua formalização através da prática (Etnomatemática), ou sua prática reflexiva.

do ser humano, na concepção de indivíduo e de sociedade. Tendo dominado o mundo físico, o homem conheceu o poder da "Rainha das Ciências" (GARBI, 2006, p. 7), tanto na forma concreta como na forma abstrata. O grande desafio enfrentado, hoje, é como simpatizar com essa "Rainha das Ciências" e aprender Matemática no mundo globalizado em que vivemos. A esse respeito, Brousseau (2007, p. 15) registra:

> Sempre nos perguntamos quais são os conhecimentos matemáticos 'necessários' para a educação e a sociedade e como levar a cabo essa difusão. São abundantes os textos sobre a finalidade da matemática, e eles explicam a necessidade de, em uma sociedade, cada cidadão dispor de uma cultura matemática suficiente e, ao mesmo tempo, contar com uma quantidade adequada de técnicos e cientistas para enfrentar os desafios do futuro – quando, ao que tudo indica, a matemática virá a desempenhar um papel importante nisso.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002) para o Ensino Médio, aprender Matemática de forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras. Isso ocorre porque instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e validar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

Colocar em prática todos os objetivos propostos pelos PCNs (BRASIL, 2000; 2002) e as concepções didáticas de que dispomos não é tarefa fácil em se tratando da realidade educacional. Passamos atualmente por problemas estruturais e pedagógicos de ordem social, cultural e política.

Em tal sentido, percebendo a necessidade de uma nova abordagem do ensino da Matemática, é necessária a introdução de diferentes metodologias e situações didáticas nessa área da ciência, com a finalidade de gerar aprendizagem.

Cabe também ressaltar a grande possibilidade de utilizar os conhecimentos referentes à Teoria do Caos como ferramenta de ensino nas salas de aula. Pode, ao mesmo tempo, ser um elemento motivador no processo de ensino e aprendizagem dos conhecimentos matemáticos em estudo e, ainda, aproximar a Matemática da História.

Sendo assim, o objetivo é apoderar-se de tão ricos e interessantes saberes matemáticos que são desvendados e explicados por meio da Teoria do Caos.

É fascinante poder compreender questões vistas, até então, como inexplicáveis ou irrelevantes, e conseguir analisar esses "problemas" sob um novo ângulo. Pode-se, assim, evitar contradições do passado, pois nos referimos a uma Ciência que não trata de questões simplificadas, idealizadas, mas que nos coloca diante da complexidade do mundo real, indo contra a leitura determinística das leis da natureza.

Deseja-se, por meio do presente artigo, conhecer a Teoria do Caos e analisar seus possíveis encadeamentos com a Matemática, para se ter a compreensão da importância, passada e atual, dessa ciência. Sua aplicação pode ocorrer tanto no nível fundamental como também no nível médio, modelando a interdisciplinaridade e valorizando o ensino e a aprendizagem.

2 A Teoria do Caos e seu Conceito

Quando os gregos queriam se referir a um vazio abissal, usavam a palavra *cháos*. Entretanto, o Caos nem sempre nos remete a fatos ruins. No sentido de pura desordem, realmente, pouco se pode dizer a seu favor. Porém o que o matemático James Yorke estava querendo dizer quando se utilizou desse termo em 1975 era desordem ordenada, ou seja, um padrão de organização existente por trás da aparente casualidade.

Sobre isso, afirma Lorenz (1996, p. 15, grifo do autor):

> [...] 'Caos' – uma palavra antiga que originalmente enunciava uma falta total de forma ou arranjo sistemático, mas atualmente utilizada para sugerir a ausência de alguma forma de ordem que deveria estar presente. Apesar de sua idade, esta palavra familiar não está próxima de seu leito de morte e, recentemente, superou muitas outras palavras comuns ao adquirir vários significados *técnicos* relacionados, porém distintos.

A "Teoria do Caos" – estudo da desordem organizada – entrou em vigor somente nos anos 1980, mas suas sementes estão sendo lançadas desde 1960, quando o meteorologista do Instituto de Tecnologia de Massachusetts - MIT - Edward Lorenz desenvolveu modelos computacionais dos padrões do tempo. Como é sabido, é extremamente difícil realizar uma previsão do tempo para longo prazo, ainda que possamos isolar fatores que causam sua mudança.

Lorenz (1996), assim como muitos outros, pensava que tudo o que era necessário para realizar essa previsão era de um modelo mais abrangente. Assim sendo, escreveu um programa baseado em doze equações simples, que, em linhas gerais, possibilitavam a modelação dos principais fatores que influenciavam no tempo.

E descobriu algo surpreendente: pequenas mudanças ou pequenos erros em um par de variáveis produziam efeitos tremendamente desproporcionais. Para um período de uns dois dias, elas mal faziam diferença, mas, extrapolando-se para um mês ou mais, as mudanças produziam padrões completamente diferentes. Lorenz chamou sua descoberta de "Efeito Borboleta", tirado do título de artigo que ele publicou em 1979: "Previsibilidade: o bater de asas de uma borboleta no Brasil pode desencadear um tornado no Texas?".

Em outras palavras: fatores insignificantes, distantes podem eventualmente produzir resultados catastróficos imprevisíveis? Lorenz (1996) permitiu-se uma pequena hipérbole porque queria dramatizar seu ponto de vista, a qual aparece na figura 1, a seguir.

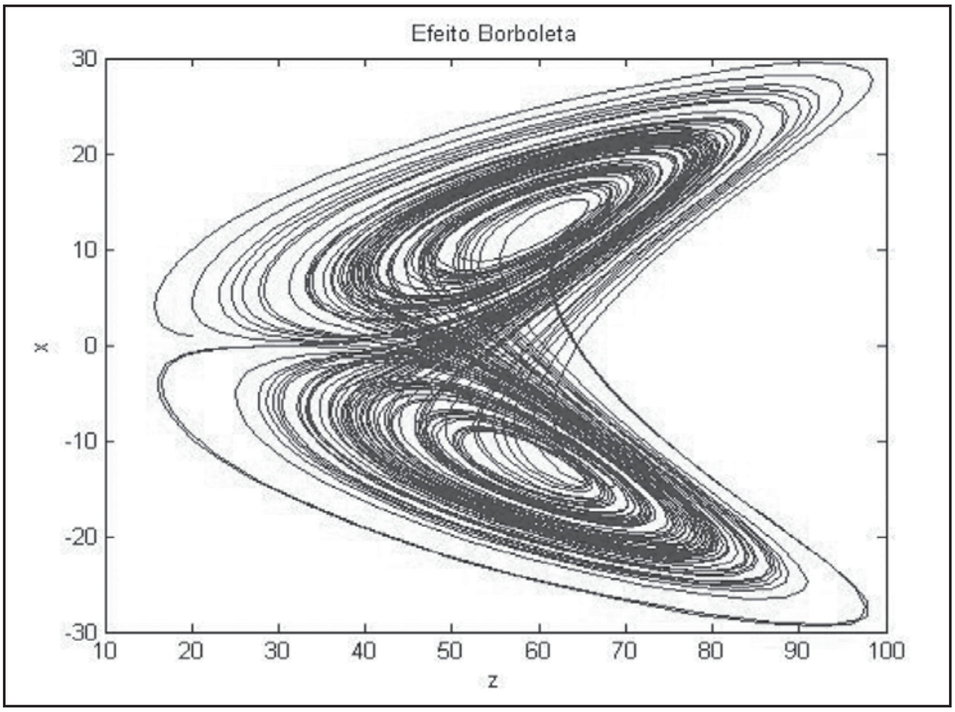

Figura 1 – Gráfico de Lorenz - Demonstrativo do Efeito Borboleta
Fonte: Arte Brasilis (2011)

Virtualmente, todos os físicos antes dos anos 1970 fixaram-se nos chamados processos “lineares” – processos em que pequenas mudanças produziam resultados proporcionalmente pequenos. Mas um grande número de fenômenos – não só na meteorologia e na física, como também na biologia, ecologia, economia, e assim por diante – não obedeciam a leis lineares nem seguiam fórmulas lineares.

Processos “não-lineares” são aqueles em que as equações envolvem taxas variáveis de mudança, e não taxas fixas, em que as mudanças são multiplicadas em vez de adicionadas, e pequenos desvios podem ter vastos efeitos.

O próximo passo em direção à Teoria do Caos foi dado nos anos 1970, quando Yorke e seu amigo, o biólogo Robert May, começaram a examinar as propriedades da assim chamada “equação logística” que, entre outras coisas, fornece um modelo simples para o crescimento da população. Essa equação funciona de maneira em que os resultados vão sempre alimentando a equação de modo a se obterem novos resultados. O interessante é que, dependendo de como utilizamos certo fator, os resultados podem se tornar altamente previsíveis ou altamente caóticos.

Para Lorenz (1996, p. 18, grifo do autor): “É apropriado chamar um sistema físico real de caótico quando se elimina de sua representação em um modelo, essa aleatoriedade inerente a qualquer fenômeno - e não aquele especificamente - e, ainda assim, o sistema *pareça* agir aleatoriamente”.

3 Geometria Fractal

A irregularidade é, paradoxalmente, regular. Essa é uma das principais características dos Fractais: a autossemelhança. Vê-se isso sempre que se corta um pedaço de brócolis e se percebe que esse pedaço é semelhante à verdura inteira. Vejam-se outros Fractais e note-se a autossemelhança.

Nos exemplos de fractais, apresentados na Figura 2, o retângulo branco significa a ampliação apresentada na imagem posterior.

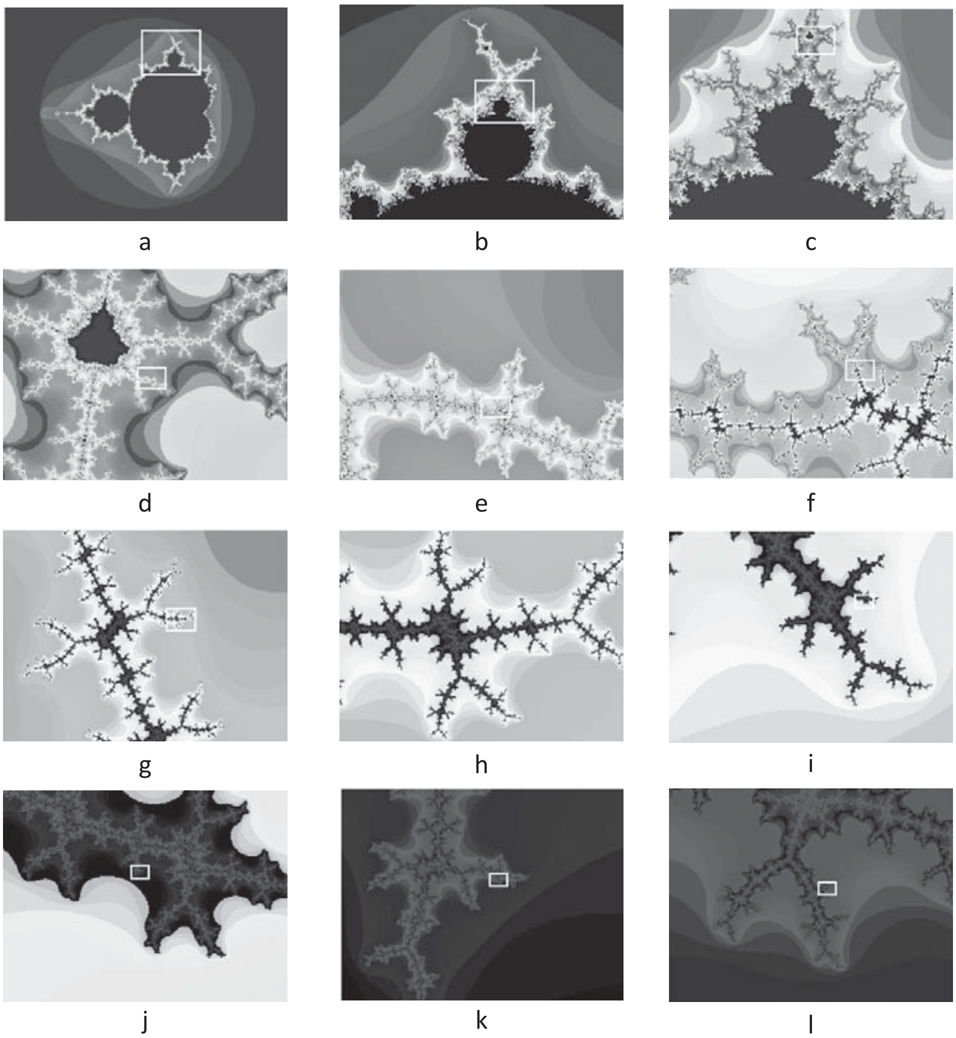

Figura 2 – Exemplos de Fractais
Fonte: Teoria do Caos (2011)

A Geometria Fractal é considerada a geometria da Teoria do Caos. Benoit Mandelbrot (Gleick, 1990), o criador da Teoria dos Fractais, insiste e mostra que é a Geometria Fractal, e não a geometria clássica euclidiana, a que realmente reflete a geometria dos objetos do mundo real.

A palavra fractal vem do latim *fractus*, que quer dizer fragmentado, fracionado. É a ideia de que a parte está no todo e o todo está na parte. Fractais são objetos e estruturas de dimensão espacial fracionária, com a propriedade de autossimilaridade.

Conforme Corrêa (2007), essa geometria, nada convencional, tem raízes remontando ao século XIX e algumas indicações nesse sentido vêm de muito antes, na Grécia Homérica, Índia, China, entre outros. Porém, somente há poucos anos vem se consolidando com o desenvolvimento dos computadores e com o auxílio de novas teorias nas áreas da Física, da Biologia, da Astronomia e da Matemática.

Diferentes definições de Fractais surgiram com o aprimoramento de sua teoria. Uma definição mais simples é esta: Fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo recursivo, apresentando autossemelhança e complexidade infinita.

A imagem da Curva de Koch é um exemplo geométrico da construção de um fractal. Um mesmo procedimento é aplicado diversas vezes sobre um objeto simples, gerando uma imagem complexa. Cada pedaço da linha foi dividido em 4 pedaços menores idênticos ao pedaço original, cada um sendo 3 vezes menor que o tamanho original. Assim, usando um novo conceito de dimensão, os matemáticos calcularam a dimensão fractal desse objeto como sendo:

$$D \quad \frac{\log(n.cópias)}{\log(escala)} \quad \frac{\log(4)}{\log(3)} \quad 1,26185$$

Na figura 3, está representa a Curva de Koch.

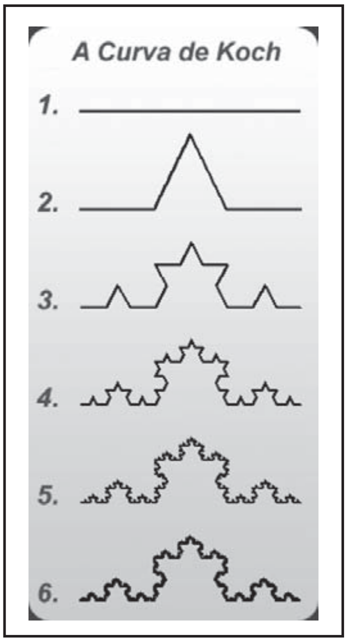

Figura 3 – Fractal "A curva de Koch"
Fonte: Janelas... (2011)

Conforme Barbosa (2005), as principais características dos Fractais são: extensão infinita dos limites; permeabilidade dos limites e autossimilaridade das formas e características:

Extensão infinita dos limites Fractais: depende da unidade padrão de medida. Devido à irregularidade dos limites, quanto mais se reduz o tamanho da unidade de medida, maior será a extensão da coisa medida. A extensão de um Fractal tende ao infinito quando a unidade padrão de medida tende a zero.

Permeabilidade dos limites Fractais: os limites dos Fractais não são rígidos, são permeáveis. A permeabilidade dos limites permite o intercâmbio de dados para a geração de informação e conhecimento, intercâmbio de energia e de matéria no meio ambiente, desde a menor escala – a do indivíduo dentro da organização – até as escalas maiores. As tecnologias de hoje não percorrem caminhos paralelos e distintos. Elas se cruzam a toda hora, o que denominamos interconexões.

Autossimilaridade dos Fractais: semelhança nas formas e características. Ao se dividir o todo em partes iterativamente, as partes, por menores que sejam, apresentam formas e características semelhantes ao todo. A parte reflete a estrutura do todo. Diz-se, então, que o todo está na parte e que a parte está no todo. A autossimilaridade proporciona um sentido de ordem a estruturas aparentemente irregulares.

Com a ideia de fractal, deixamos de ver as coisas somente quantitativamente e passamos a vê-las também com um olhar qualitativo.

A Geometria Fractal está intimamente ligada à Teoria do Caos. São as estruturas quebradas, complexas, estranhas e belas dessa geometria que conferem uma certa ordem ao Caos, e esta é, muitas vezes, caracterizada como sendo a linguagem do Caos.

Nas palavras de Lorenz (1996, p. 212-213), "alguns Fractais chegam a quase ser classificados como Caos por serem produzidos mediante regras descomplicadas, embora parecendo altamente complexas, e não apenas por aparentar estruturas não-convencionais".

A ciência dos Fractais apresenta estruturas geométricas de beleza infinita e grande complexidade, que estão ligadas ao desenvolvimento da vida, às formas da natureza e a própria compreensão do universo. Trata-se de uma geometria nada convencional.

Essa geometria busca padrões organizados de comportamento dentro de um sistema aparentemente aleatório.

A geometria fractal e o Caos teriam permanecido como meras curiosidades não fosse a descoberta do físico Mitchell Feigenbaum, nos meados da década de 1970, de que muitos sistemas não-lineares, aparentemente não relacionados, comportam-se de modos claramente semelhantes. Isso sugere que deveria existir uma teoria unificada para explicar o comportamento caótico dos sistemas e equações em uma faixa ampla de setores. E foi nesse momento que os cientistas realmente começaram a prestar atenção nas situações de Caos.

A Teoria do Caos é algo recente e ainda está sendo lapidada e novas aplicações estão sendo descobertas ou inventadas, artigos continuam a ser publicados, dúvidas e demonstrações alternam-se rapidamente. Apesar disso, a Teoria do Caos lançou alguma luz no comportamento dos sistemas quintessenciais de líquidos fluindo, os quais são propícios a sofrer mudanças rápidas de um comportamento estável para um comportamento aparentemente caótico, no modo como a água passa de líquido fixo a líquido em ebulição, à medida que a temperatura é ligeiramente aumentada. A 99,5 °C, a água é apenas água quente; a 100,5 °C, ela passa a mudar de estado, tornando-se gasosa.

Como salienta Gleick (1990), medir a dimensão fractal de uma superfície metálica pode nos fornecer uma informação a respeito de sua resistência. A superfície da terra tem uma dimensão fractal, da mesma forma que os vasos sanguíneos em nosso corpo. Até o cérebro humano e sua consciência podem ter formas Fractais.

A Geometria Fractal tem sido adotada em algumas empresas, tais como General Electric, Esso, Estúdios de Hollywood, e também em vários setores, como na Economia, na Medicina, para, por exemplo, realizar a análise de instabilidades paramétricas de estruturas, entre outros.

4 Metodologia

Segundo os PCNs (BRASIL, 2000; 2002), o estudo da Geometria é um dos objetivos para a Matemática. As habilidades e competências passam a ter novo enfoque, uma nova abordagem, valorizando a integração das disciplinas.

As atividades com cortes e dobraduras são muito enriquecedoras no que se refere às inúmeras possibilidades que elas oferecem nos diversos ramos da matemática. Além de toda a exploração geométrica que é possível fazer, noções de proporcionalidade, frações, funções e álgebra são fortemente evidenciadas nessa prática.

Por tudo isso, após um estudo realizado acerca do que consiste a Geometria Fractal, fez-se a construção da atividade descrita a seguir e intitulada *Construindo Cartões Fractais Tridimensionais*, segundo o que foi sugerido por Almeida *et al*. (2011). Para os autores, trata-se de uma proposta de atividade que permite introduzir a Geometria dos Fractais meio da construção de cartões Fractais em três dimensões, explorando as características que definem esse conjunto e a geometria euclidiana envolvida no processo de construção.

Os cartões resultam de uma sequência de cortes (linhas cheias) e dobraduras (linhas pontilhadas), tomando-se como ponto de partida a planificação do cartão *Degraus Centrais* (figura 4).

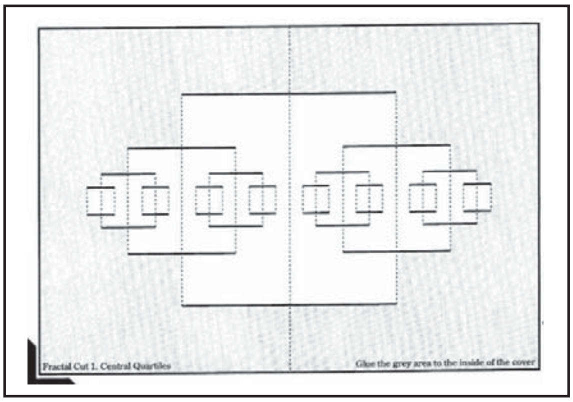

Figura 4 – Cartão Fractal Degraus Centrais
Fonte: Almeida *et al*. (2011)

Pode-se observar que o cartão da figura 4 possui estruturas autossimilares. Com o cartão pronto, observa-se que as formas geométricas resultantes dos cortes e dobraduras são paralelepípedos.

Percebeu-se, durante a construção, que a cada novo corte e dobradura, obtivemos novos paralelepípedos. Se chamarmos de iteração zero a primeira geração do cartão, quantos paralelepípedos novos surgem a cada iteração? Pode-se explorar a construção do cartão construindo a tabela 1, mostrada abaixo.

Tabela 1: Iteração X Número de Paralelepípedos Novos

Iteração	Número de Paralelepípedos Novos
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
...	...
n	2^n

Fonte: Almeida *et al*. (2011)

Notou-se que, a cada iteração, o número de novos paralelepípedos dobra, porém, em escala menor (paralelepípedos menores). Com isso, pode-se concluir que o processo de construção dos paralelepípedos em cada iteração é descrito pela lei de potência 2^n, em que n = 0, 1, 2, 3,..., é o número de iterações.

A tabela 2, inserida na proxima página, mostra o cálculo dos volumes dos paralelepípedos obtidos nas diferentes iterações, assim como o volume total. Nesse caso, a lei de potência dos volumes produz equações de maior complexidade. Essa atividade de generalização da lei dos volumes pode ser encarada como um grande desafio para os estudantes.

Com base nos dados apresentados na tabela a seguir, é possível chegar à fórmula geral que informa o volume total dos paralelepípedos do cartão em uma iteração qualquer. Na tabela acima, observamos que o volume total do sólido em uma iteração qualquer é a soma dos termos de uma progressão geométrica.

À medida que o número de iterações vai aumentando, surgem novos paralelepípedos, logo o volume total aumenta. Entretanto, a variação de volume de uma iteração para outra é cada vez menor, pois o volume de cada novo paralelepípedo diminui. Essa ideia poderia ser utilizada para introduzir a noção de limite.

Nota-se também que o cartão possui autossimilaridade, ou seja, ele mantém a mesma forma e estrutura sob uma transformação de escala e complexidade infinita. Se fosse possível continuar infinitamente o processo de corte e dobradura no papel, nunca obteríamos o "cartão final", uma vez que a lei que define o processo de construção poderá continuar a ser aplicada infinitamente.

Tabela 2: Volume dos Novos Paralelepípedos em cada Iteração e Volume Total para o Cartão Fractal Degraus Centrais.

Iteração	Volume do novo paralelepípedo	Volume total (soma dos volumes de todos os paralelepípedos)
0	$\frac{a}{2}^{\;2}\; a \;\frac{a^3}{4}\; \frac{a^3}{2^0\;\;2^2}$ $a\;\frac{a}{2}\;\frac{a}{2}\;\frac{a^3}{4}$	$\frac{a^3}{4}\; a\; \frac{a}{2}\;\frac{a}{2}\;\frac{a^3}{4}$
1	$\frac{a}{4}^{\;2}\;\frac{a}{2}\;\frac{a^3}{32}\;\frac{a^3}{2^5}\;\frac{a^3}{2^3\;\;2^2}$ $a\;\frac{a}{2}\;\frac{a}{2}\;\frac{a^3}{4}$	$\frac{a^3}{4}\;2\;\frac{a^3}{32}\;\frac{4a^3\;\;a^3}{16}\;\frac{5a^3}{16}\;a\;\frac{a}{2}\;\frac{a}{2}\;\frac{a^3}{4}$
2	$\frac{a}{8}^{\;2}\;\frac{a}{4}\;\frac{a^3}{256}\;\frac{a^3}{2^8}\;\frac{a^3}{2^6\;\;2}$ $a\;\frac{a}{2}\;\frac{a}{2}\;\frac{a^3}{4}$	$\frac{5a^3}{16}\;4\;\frac{a^3}{256}\;\frac{20a^3\;\;a^3}{64}\;\frac{21a^3}{64}$ $a\;\frac{a}{2}\;\frac{a}{2}\;\frac{a^3}{4}$
...	...	...
n	$\frac{a^3}{2^{3n\;\;2}}\;a\;\frac{a}{2}\;\frac{a}{2}\;\frac{a^3}{4}$	$\frac{a^3}{3}\;1\;\frac{1}{4}^{\;n\;\;1}\;a\;\frac{a}{2}\;\frac{a}{2}\;\frac{a^3}{4}$

Fonte: Almeida *et al*. (2011)

4 Discussão dos Resultados

Durante o processo de construção dos cartões, foi possível discutir os seguintes tópicos:

- as características que definem um conjunto fractal, como a autossimilaridade e a complexidade infinita;
- a generalização da lei de crescimento envolvida, por meio do número de "paralelepípedos" ao longo das iterações e dos volumes;
- a descrição de uma sequência ou de série convergente a partir da lei de crescimento do cartão;
- a noção de limite de uma função.

Percebeu-se que os alunos compreenderam os conteúdos envolvidos na construção do cartão e realizaram a atividade com interesse e dedicação.

Outra abordagem possível seria a investigação das leis produzidas por outras regras de construção de cartões e pela exploração de outras grandezas, como os comprimentos dos cortes ou as áreas das faces.

Acredita-se que a abordagem proposta aproximou os conceitos matemáticos da realidade do aprendiz, fazendo-o refletir e criar novas relações com a matemática, a partir do jogo da construção dos cartões Fractais. Mesmo conceitos muito distantes da realidade, como as séries e limites, tornaram-se concretos durante essa exploração.

5 Conclusão

O conhecimento de novas maneiras de ensinar e de aprender leva o educador a transpor as barreiras da educação tradicional, ainda presente em muitas escolas. Construir um conjunto de novos conhecimentos exige pesquisa do docente, além de aceitação e adaptação dos alunos. A relação entre um tema gerador, presente na sociedade, com conteúdos já estruturados formalmente, pode agregar aspectos positivos na rede de re-significação dos alunos. Segundo Bicudo (1997, p. 52):

> O ser professor traz, portanto, em seu bojo, tanto a preocupação para com o modo de ser e de conhecer do aluno como para com o do ser e do conhecer do corpo de conhecimentos humano, objeto do seu ensino. É preciso, assim que o professor tenha claro para si o que essa área diz do mundo, o que revela sobre ele, como explica o que revela, como são gerados seus conhecimentos, como os membros são perpetuados na tradição cultural da humanidade e são transmitidos em uma cadeia sem fim de contatos humanos na qual sempre existem centelhas de pensamento criativo e de abertura para o original.

Acredita-se que as competências e habilidades adquiridas e desenvolvidas pelos alunos são verdadeiramente concretizadas quando algum elemento pertencente à sua realidade (social, cultural, econômica), conhecido ou não, é adaptado e discutido no âmbito escolar. Muitas vezes, trata-se de elementos pertencentes ao cotidiano dos alunos, porém desconhecidos por eles mesmos. A validação de um conceito pode revelar um novo olhar sobre aquilo que antes era desconhecido e isso ocorre no estudo da Teoria do Caos, proposta do presente trabalho, no qual se buscou resgatar parte da história desta ciência com a finalidade de conhecer e interpretar com maior juízo seu conceito. Além disso, procurou-se mostrar a possibilidade da aplicação de alguns de seus métodos e destacá-los como elemento motivador no ensino da Matemática.

Considerados como eixos norteadores História, Teoria do Caos e Matemática, os temas reforçaram conjecturas atuais na busca por uma aprendizagem da Matemática. Essas conjecturas revelam que aprender Matemática nos dias de hoje requer habilidades diferentes, além de somente resolver cálculos. Exige uma relação mais próxima com a língua materna, seja na leitura, interpretação de enunciados e capacidade de aguçar o raciocínio lógico. É possível ensinar Matemática, desde as séries iniciais, a partir de uma mediação intrínseca da Língua Materna.

Machado (1993, p. 109) revela:

> Uma das questões mais candentes no que concerne ao ensino tanto da Matemática como da Língua Materna é a legitimidade ou a conveniência da utilização de um sistema de signos de um modo predominantemente técnico, operacional, restrito a regras sintáticas, em contraposição a um uso que privilegie o significado dos elementos envolvidos, portanto sua dimensão semântica.

O esforço concentrou-se em proporcionar a compreensão do comportamento dos sistemas ditos caóticos e sua linguagem fractal. Por esse motivo, foram propostas atividades didáticas para introduzir a ciência da Teoria do Caos na sala de aula. Somente as sugestões de atividades não serviriam de forma suficiente. Os Fractais, a geometria das formas irregulares e dos sistemas caóticos são uma maneira de se ver e refletir sobre o paradoxo de complexidade-simplicidade da natureza. Árvores e rios, nuvens e costas podem ser descritos pela geometria fractal. Em um nível, a complexidade do fractal é uma curiosa ilusão, porque, embora os detalhes da figura possam ser infinitos, ela cresceu de modo simples.

As atividades sugeridas para os alunos foram realizadas de forma tranquila, e os resultados foram muito satisfatórios.

Após inúmeras pesquisas referentes Teoria do Caos, percebe-se que o campo de estudo é vasto e apenas está começando a ser explorado aqui no Brasil. A oportunidade está em vincular a disciplina de Matemática a essa ciência e proporcionar novos campos de pesquisa.

Sendo assim, a finalidade do presente trabalho foi concentrar a tomada de conhecimento da Teoria do Caos, além de promover a aplicação parcial de seus conceitos nas aulas de Matemática e proporcionar uma forma diferente de aprender Matemática, mais contextualizada, lúdica, atual e transdisciplinar.

O ensino tem por objetivo ser provedor de aprendizagem, ele deve lançar-se à busca das verdades, do resgate dos valores, do entendimento de realidades. Deve direcionar seus olhares ao mundo do possível, ser democrático, conceitual e motivador. Não pode ser formal, separar o homem do mundo em que vive. De acordo com Morin (2000, p. 16):

> Devemos, pois, pensar o problema do ensino, considerando, por um lado, os efeitos cada vez mais graves da compartimentação dos saberes e da incapacidade de articulá-los, uns aos outros; por outro lado, considerando que a aptidão para contextualizar e integrar é uma qualidade fundamental da mente humana, que precisa ser desenvolvida, e não atrofiada.

As propostas de estudo referentes à Teoria do Caos devem ser planejadas pelo docente, valorizando o aspecto histórico. É interessante que se reforcem os conteúdos matemáticos, pois os alunos podem apresentar dificuldade na aplicação; a característica de cada atividade pode variar de classe para classe. De qualquer forma, as interpretações dos alunos são particulares, e a rede de significados pode variar de ambiente escolar.

Acredita-se que as competências e habilidades adquiridas e desenvolvidas pelos alunos foram verdadeiramente concretizadas, o que torna realmente válido todo o trabalho desenvolvido.

Referências

ALMEIDA, Theodoro Becker *et al*. **Fractais no Ensino Fundamental**: Explorando essa nova geometria. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO00995663033T.doc>. Acesso em: 21 jan. 2011.

ARTE BRASILIS. Disponível em: <http://www. artebrasilis.blogspot.com>. Acesso em: 21 jan. 2011.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BICUDO, Maria Aparecida V. (Org.). **Educação Matemática**. São Paulo: Moraes, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

______. ______. ______. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2002.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: Conteúdos e Métodos de Ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CÔRREA, Jorge Willians. **Teoria do Caos**. 2007. Disponível em: <http://sites.google.com/site/onthechaos/sobre>. Acesso em: 15 fev. 2011

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação**: reflexões sobre Educação e Matemática. São Paulo. Summus/Unicamp, 1986.

GARBI, Gilberto G. **A Rainha das Ciências** - um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

GLEICK, James. **Caos** - a criação de uma nova ciência. 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1990.

JANELAS para o infinito. **Exposição de fractais**. Disponível em: <http://www.fractarte.com.br/artigos.php>. Acesso em: 15 fev. 2011

LORENZ, Edward N. **A Essência do Caos**. Brasília: Universidade de Brasília, 1996.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna:** análise de uma impregnação mútua. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1993.

MANDELBROT, Benoit. **The Fractal Geometry of Nature**. San Francisco: Freeman, 1983.

MORIN, Edgar. **A cabeça bem-feita:** repensar a reforma, reformar o pensamento. 8. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2000.

PRIGOGINE, Ilya. **As leis do Caos**. São Paulo: Unesp, 2002.

SILVA, Alex; SILVA, Joice. **O que é Teoria do Caos**. 2010. Disponível em: <http://www.geometras.com.br>. Acesso em: 27 mar. 2011.

SIQUEIRA, Rodrigo. **Janelas para o infinito** - Exposição de fractais. 2010. Disponível em: <http://fractart.com.br/artigos/caos-e-ordem.php>. Acesso em: 25 jan. 2011.

TEORIA DO CAOS. Disponível em: <https://sites.google.com/site/onthechaos/fract>. Acesso em: 21 jan. 2011.